

Решения 11 класс

1. Самолет. Ответ: 13 часов.

Решение. Принимаем время аэропорта А за точку отсчета. Пусть время аэропорта Б отстает от времени аэропорта А на a часов, а время аэропорта В опережает время аэропорта А на b часов. Тогда время аэропорта В опережает время аэропорта Б на $b + a$ часов.

Значит, первый перелет длился $a - 1$ часов, второй полет длился

$(24 - 16) + 5 - (a + b) = 13 - a - b$ часов, а третий перелет длился $(11 - 10) + b = 1 + b$ часов. В сумме a и b сокращаются и получается 13 часов.

На самом деле, можно поступить гораздо проще. Самолет отсутствовал в аэропорту А 23 часа. Всё это время он или находился в воздухе, или стоял в аэропорту. При этом в аэропорту Б он стоял 4 часа, а в аэропорту В $11 - 5 = 6$ часов. Значит, в воздухе он находился $23 - 4 - 6 = 13$ часов.

2. Наклонная плоскость. Ответ: 0,762 м.

Решение. Введем обозначения: $h = 0,6$ м – высота клина, $l = h/\sin(\alpha) = 1$ м – длина наклонной плоскости, $V_0 = 5$ м/с, $\mu = 0,25$ – коэффициент трения, $g = 10$ м/с². По теореме об изменении кинетической энергии скорость на вершине клина будет равна:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgl \cos \alpha - mgl \sin \alpha \Rightarrow V_1^2 = V_0^2 - 2gl(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$V_1^2 = 25 - 16 \Rightarrow V_1 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В этот момент брусок начинает движение под углом к горизонту и через промежуток времени

$$V_1 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{V_1 \sin \alpha}{g}$$

он достигнет максимальной высоты

$$H = h + \frac{V_1^2 \sin \alpha}{2g} = 0,762 \text{ м.}$$

3. Чемодан. Ответ: 66 кг.

Решение. По первому ограничению оптимальная коробка должна иметь форму куба со стороной 50 см (именно в этом случае достигается наибольший объем). В таком случае объем будет равен $50^3 = 125000$ см³.

Если выбрать коробку с длиной 220 см, то наибольшим ее объем будет в случае, если два других

измерения будут одинаковы и равны $\frac{220}{k}$ см. Тогда объем равен $\frac{220}{k} \cdot \frac{220}{k} \cdot 220 = \frac{220^3}{k^2}$ см³.

Эта коробка будет больше по объему, чем кубическая, если $\frac{220^3}{k^2} > 50^3 \Rightarrow k^2 < \left(\frac{220}{50}\right)^3 \Rightarrow k < \sqrt{4,4^3} \approx 9,23$.

Таким образом, наибольшее целое $k = 9$. Тогда объем равен $\frac{220^3}{9^2}$ см³, а масса равна $\frac{220^3}{9^2} \cdot 0,5 \text{ г} = 65728,4 \text{ г} \approx 66 \text{ кг}$.

4. Шарики и пружины. Ответ: 300.

Решение. Пусть l_0 – длина вертикальных и горизонтальных пружинок в начальном ненапряженном состоянии. Тогда начальные длины диагональных пружинок равны $\sqrt{2}l_0$.

После приложения сил горизонтальные пружинки растянулись на Δx , диагональные – на Δl , а вертикальные сжались на Δy . Для растянутого состояния получаем:

$$(\sqrt{2}l_0 + \Delta l)^2 = (l_0 + \Delta x)^2 + (l_0 - \Delta y)^2,$$

откуда следует

$$2\sqrt{2}\frac{\Delta l}{l_0} - 2\left(\frac{\Delta x}{l_0} - \frac{\Delta y}{l_0}\right) = \left(\frac{\Delta x}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{l_0}\right)^2 - \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2. \quad (1)$$

С учетом $\frac{\Delta x}{l_0} \ll 1$, $\frac{\Delta y}{l_0} \ll 1$, $\frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$ правой частью в (1) можно пренебречь, поэтому

$$\Delta l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta x - \Delta y). \quad (2)$$

Условием равновесия каждого шарика является равенство нулю суммарной действующей на него силы. Эти равенства в вертикальном и горизонтальном направлениях записываются в виде:

$$k\Delta y = k_1\Delta l \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3)$$

$$k\Delta x + k_1\Delta l \frac{1}{\sqrt{2}} = F. \quad (4)$$

Из (2) и (3) находим:

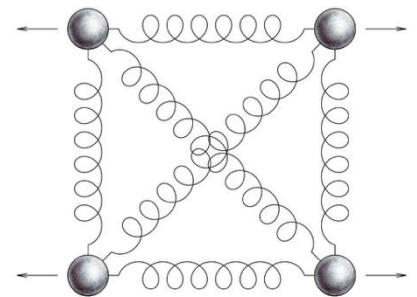
$$\Delta y = \frac{k_1}{2k+k_1}\Delta x. \quad (5)$$

С помощью (2) и (5) из (4) получаем

$$k\Delta x \frac{2(k_1+k)}{2k+k_1} = F.$$

Отсюда следует, что искомый коэффициент жесткости конструкции

$$k_* = \frac{2F}{\Delta x} = \frac{4k(k_1+k)}{2k+k_1} = 300.$$



5. Ученый. Ответ: 219 мкг.

Решение. Если обозначить массу вещества, полученного за n -ю секунду через a_n , то, по условию:

$$a_n = a_{n-1} : \frac{(n+4)n}{(n+3)(n-1)}. \text{ Значит,}$$

$$a_1 = 84, \quad a_n = \frac{(n+3)(n-1)}{(n+4)n} \cdot a_{n-1}.$$

Из последнего рекуррентного отношения следует, что

$$a_n \cdot (n+4) \cdot n = a_{n-1} \cdot ((n-1)+4) \cdot (n-1),$$

то есть произведение $a_n \cdot (n+4) \cdot n$ является постоянной величиной для любого n . Это означает, что (здесь C – некоторая константа)

$$a_n = \frac{C}{(n+4)n}.$$

При $n = 1$ получим $a_1 = \frac{C}{5}$, а значит, $C = 420$. Таким образом, нам нужно найти сумму убывающей последовательности

$$\sum_{n=1}^{1800} \frac{420}{(n+4)n}.$$

Так как $\frac{1}{(n+4)n} = \frac{A}{n+4} + \frac{B}{n} = \frac{n(A+B)+4B}{(n+4)n}$, то выбирая $B = \frac{1}{4}$, $A = -\frac{1}{4}$, получим $\frac{420}{(n+4)n} = 105 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{1800} \frac{420}{(n+4)n} = 105 \cdot \sum_{n=1}^{1800} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right).$$

После упрощений (получилась «телескопическая сумма») остается

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{1801} - \frac{1}{1802} - \frac{1}{1803} - \frac{1}{1804} \right).$$

Сумма первых четырех слагаемых равна

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{105 \cdot 25}{12} = 218,75.$$

Модуль суммы четырех последних слагаемых

$$105 \cdot \left(\frac{1}{1801} + \frac{1}{1802} + \frac{1}{1803} + \frac{1}{1804} \right) < \frac{105 \cdot 4}{1801} < 0,24.$$

Значит, значение суммы превышает 218,5, но меньше, чем 218,75, то есть ближайшее целое значение есть 219.

(Для справки: более точный ответ: 218,516990...)

6. Поршень. Ответ: $Q = -\frac{5mgp_a S}{2k} + \frac{5}{2}p_a S l - \frac{11m^2 g^2}{2k} + 4mgl$.

Решение (первый способ). Массы поршней равны начальной массе находящейся в сосуде воды, поэтому (здесь ρ – плотность воды)

$$m = \rho g S l. (1)$$

Пусть l_0 – длина недеформированной пружины, а Δs – сжатие пружины в начальном положении. Движение поршней медленное, каждое положение является положением равновесия.

Условие равновесия верхнего поршня в начальном положении имеет вид:

$$k\Delta s = 2mg + p_a S, (2)$$

где p_a – атмосферное давление.

Рассмотрим некоторое промежуточное состояние, в котором нижний поршень поднялся на расстояние x относительно своего начального положения, а верхний поршень – на расстояние y . Тогда деформация пружины равна $\Delta s + x - y$. К указанному моменту часть воды вылилась из сосуда, над верхним поршнем находится слой воды высотой $(l - y)$. В этом случае условие равновесия верхнего поршня записывается в виде:

$$k(\Delta s + x - y) = mg + p_a S + \rho g S(l - y). (3)$$

С учетом (1) и (2) уравнение (3) принимает вид:

$$2mg + p_a S + k(x - y) = mg + p_a S + mg - \frac{mgy}{l},$$

откуда следует

$$x = \alpha y, (4)$$

где $\alpha = 1 - \frac{mg}{kl}$.

Пусть p – давление газа в рассматриваемом состоянии. С помощью условия равновесия нижнего поршня

$$pS = k(\Delta s + x - y) + mg = 3mg + p_a S - \frac{mgy}{l}$$

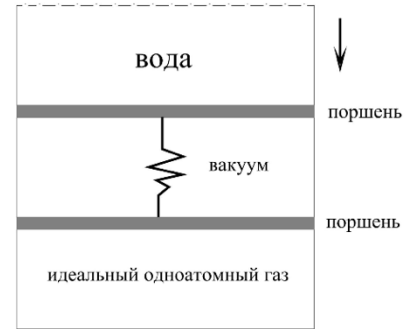
получаем выражение для давления:

$$p = p_a + \frac{3mg}{S} - \frac{mgy}{lS}. (5)$$

Рассмотрим малый «шаг» процесса – газ получил от нагревателя тепло ΔQ , нижний и верхний поршень сдвинулись вверх на расстояния Δx и Δy соответственно.

Согласно первому закону термодинамики

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta A + \Delta U = p\Delta V + \frac{3}{2}\nu R\Delta T = p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) = \\ &= p\Delta V + \frac{3}{2}(p\Delta V + V\Delta p) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p \end{aligned} (6)$$



Здесь ΔA – работа газа, ΔU – изменение внутренней энергии.

Объем газа $V = (l + x)S = (l + \alpha y)S$, поэтому $\Delta V = \alpha S \Delta y$. Изменение давления $\Delta p = \frac{\Delta p}{\Delta y} \Delta y = -\frac{mg}{lS} \Delta y$ (для линейной функции $p(y)$ значение $\frac{\Delta p}{\Delta y}$ равно угловому коэффициенту в формуле (5)). Таким образом, из формулы (6) с использованием (5) находим:

$$\Delta Q = F(y) \Delta y,$$

$$\text{где } F(y) = \frac{5}{2} \left(p_a + \frac{3mg}{S} - \frac{mgy}{lS} \right) \alpha S - \frac{3}{2} \frac{mg}{lS} (l + \alpha y) S.$$

Из условия задачи известно, что газ все время получает тепло, поэтому $F(y) > 0$ при всех $0 \leq y \leq l$ (при $y = l$ верхний поршень находится в самом верхнем положении, на расстоянии $3l$ от дна, при этом вся вода вытеснена из сосуда). Общее количество теплоты Q , полученное газом, может быть найдено как площадь под графиком функции $F(y)$ при $0 \leq y \leq l$. Функция $F(y)$ линейная, соответствующая фигура – трапеция. Поэтому

$$Q = \frac{F(0)+F(l)}{2} l = \frac{11}{2} mgl\alpha + \frac{5}{2} p_a S l \alpha - \frac{3}{2} mgl.$$

Подставляя в последнюю формулу $\alpha = 1 - \frac{mg}{kl}$, окончательно получаем:

$$Q = -\frac{5mglp_a S}{2k} + \frac{5}{2} p_a S l - \frac{11m^2 g^2}{2k} + 4mgl \quad (7)$$

Решение (второй способ). Рассмотрим два состояния – начальное, описанное в условии задачи, и конечное, соответствующее крайнему положению верхнего поршня, когда вся вода оказывается вытесненной. Будем индексами 1 и 2 отмечать величины, соответствующие этим двум состояниям.

Пусть l_0 – длина недеформированной пружины, L – расстояние от дна до нижнего поршня в состоянии 2.

В начальный момент пружина имеет длину l и сжата на Δs_1 , в конечном положении пружина имеет длину $3l - L$ и сжата на Δs_2 . Тогда

$$l = l_0 - \Delta s_1, \quad 3l - L = l_0 - \Delta s_2, \quad \text{откуда следует}$$

$$L = 2l + \Delta s_2 - \Delta s_1. \quad (8)$$

Из условий равновесия верхнего поршня в состояниях 1 и 2 следует:

$$\Delta s_1 = \frac{2mg + p_a S}{k}, \quad \Delta s_2 = \frac{mg + p_a S}{k}. \quad (9)$$

Из (7) с помощью (8) находим

$$L = 2l - \frac{mg}{k}. \quad (10)$$

Энергия системы «газ + поршни + пружина» состоит из внутренней энергии газа, потенциальной энергии поршней и потенциальной энергии деформированной пружины. Вычислим значение энергии в состояниях 1 и 2:

Получим:

$$W_1 = \frac{3}{2} \nu R T_1 + mgl + 2mgl + \frac{k(\Delta s_1)^2}{2},$$

$$W_2 = \frac{3}{2} \nu R T_2 + mgL + 3mgl + \frac{k(\Delta s_2)^2}{2}.$$

Изменение энергии

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + mgL + \frac{k}{2} [(\Delta s_2)^2 - (\Delta s_1)^2]. \quad (11)$$

С помощью (9) находим

$$(\Delta s_2)^2 - (\Delta s_1)^2 = (\Delta s_2 - \Delta s_1)(\Delta s_2 + \Delta s_1) = \frac{mg(2p_a S + 3mg)}{k}. \quad (12)$$

Далее,

$$\nu R (T_2 - T_1) = p_2 V_2 - p_1 V_1 = p_2 SL - p_1 Sl.$$

Из условий равновесия нижнего поршня следует

$$p_1 S = p_a S + 3mg; \quad p_1 S = p_a S + 2mg,$$

Тогда получаем:

$$\nu R (T_2 - T_1) = (p_a S + 3mg)L - (p_a S + 2mg)l. \quad (13)$$

Подставляя (10), (12) и (13) в формулу (11), находим:

$$\Delta W = -\frac{5mgp_a S}{2k} + \frac{3}{2} p_a Sl - \frac{11m^2 g^2}{2k} + \frac{7}{2} mgl. \quad (14)$$

Согласно закону сохранения энергии

$$Q = \Delta W + A. \quad (15)$$

где Q – полученное за все время тепло, A – работа по вытеснению воды из сосуда.

Таким образом, остается найти работу A . Если верхний поршень поднялся на y , то высота уровня

воды в сосуде $(l - y)$, давление воды на поршне $p = p_a + \rho g(l - y) = p_a + \frac{mg}{S} \left(1 - \frac{y}{l}\right)$. Сила,

с которой поршень действует на воду, равна $f = p_a S + mgl \left(1 - \frac{y}{l}\right)$. Искомая работа A – работа

этой силы на пути $0 \leq y \leq l$. Она находится как площадь под графиком $f(y)$ при $0 \leq y \leq l$.

$$\text{Находим } A = p_a Sl + \frac{mgl}{2}. \quad (16)$$

Подставляя (14) и (16) в (15), получаем выражение для количества тепла Q , совпадающая с формулой (7), полученной ранее другим способом.